



УДК: 517.957
MSC 2010: 35Q53

Трехфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях

А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв

Построены трехфазные конечнозонные решения фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I с поведением почти-периодических «странных волн». Изучена зависимость параметров решения от параметров спектральной кривой.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение КП, уравнение Хироты, тэта-функция, редукция, накрытие

Введение

В настоящее время одной из актуальных задач нелинейной физики является исследование проблемы возникновения «волн-убийц» (rogue waves) или «странных волн» (freak waves). В отличие от солитонов, являющихся распространяющимися с постоянной скоростью незатухающими уединенными волнами, «странные волны» представляют собой локальный кратковременный рост амплитуды или «волны, появляющиеся ниоткуда и исчезающие без следа» [1]. Хотя «волны-убийцы» обнаружены в моделях, относящихся к различным областям физики (см., например, [2]), основные области их появления — это гидродинамика [3–7] и нелинейная оптика [8, 9]. Обычно при изучении «странных волн» в главном приближении рассматривают фокусирующее нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$i\psi_z + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

а при выборе точных решений обращаются к рациональным решениям, получающимся в результате преобразования Дарбу и его обобщений [10–16]. Точные решения, отличающиеся от рациональных, упоминаются довольно редко [8, 17–19]. При учете более тонких эффектов

Получено 3 марта 2013 года
После доработки 31 мая 2013 года

Смирнов Александр Олегович
alsmir@guap.ru
Головачёв Григорий Михайлович
ggolovachev@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)
190000, Россия, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., д. 67

[4, 5, 8, 19–24] уравнения отличаются от НУШ дополнительными слагаемыми, приводящими к неинтегрируемости уравнения и, соответственно, к невозможности построения некоторых классов решений.

Вместе с тем, существуют ситуации, когда этими дополнительными слагаемыми можно пренебречь [8, 19, 24], ограничить свое рассмотрение уравнением (1), которое является интегрируемым, и рассмотреть присущие интегрируемым уравнениям классы решений, такие как многофазные периодические решения. С одной стороны, в натурных экспериментах ряда авторов [6, 7, 9] наблюдались волны, по своим характеристикам близкие к рациональным решениям. С другой стороны, в работах [19, 24] показано, что начальные данные, полученные в рамках проекта JONSWAP (Joint Nord Sea Wave Project), могут быть использованы для построения 6-фазного решения НУШ. Вполне возможно, что если бы авторы работ [6, 7, 9] могли сравнить экспериментальные данные с характеристиками многофазных решений, они также получили бы относительно хорошее совпадение, особенно в тех случаях, когда периоды решетки значительно превосходят размеры бассейна.

Естественно, если рассматривать волны на поверхности воды, то вряд ли стоит ожидать возникновения периодических «волн-убийц». Однако в нелинейной оптике вполне возможно создание ситуаций, приводящих к возникновению «странных волн», образующих решетку «световых точек» в планарном волноводе. В связи с этим обратим внимание на работы [12–15], в которых у рациональных решений НУШ параметры выбраны таким образом, что «странные волны» образуют симметричные конфигурации на плоскости XOZ . Кроме того, единичные «волны-убийцы» могут быть получены в результате синхронизации фаз многофазного решения с большим числом несоизмеримых фаз.

Многофазные конечнозонные решения строятся с помощью метода «конечнозонного (алгебро-геометрического) интегрирования» [25–27], связанного, прежде всего, с именами Дубровина, Новикова, Лакса, Матвеева, Итса, Кричевера (см., например, [28–34]) и их учеников. Интересующихся подробностями возникновения метода отошлем к обзору [35]. Отметим, что рациональные [10–14, 16] и периодические по x гомоклинические решения [18, 19, 24, 36–38], которые обычно получают с помощью многократных преобразований Дарбу или Бэклунда, могут быть получены также и полным или частичным вырождением многофазных решений [25]. Например, как показано в [39], хорошо известные солитон Перегрин и бризеры Ахмедиева и Ма [3, 8, 40] могут быть получены вырождением двухзонного двоякопериодического решения. Нетрудно понять, что в результате вырождений конечнозонных решений с большим числом фаз можно получать и более сложные рациональные и квазирациональные решения (в частности, те, которые приведены в работах [7, 10–15]).

В настоящей работе строятся и исследуются имеющие поведение «странных волн» трехзонные (трехфазные) решения уравнения (1) и других, связанных с ним, интегрируемых нелинейных уравнений.

1. Конечнозонные многофазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера

Нелинейные дифференциальные уравнения, интегрируемые методами алгебраической геометрии, могут быть получены как условие совместности системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений со спектральным параметром [25–27]. В частности, рассмотрим уравнения [26, 41, 42]

$$Y_x = \mathcal{U}Y, \quad (1.1a)$$

$$Y_z = \mathfrak{Y}Y, \quad (1.1b)$$

$$Y_t = \mathfrak{W}Y, \quad (1.1c)$$

где

$$\mathfrak{U} = -\lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\psi \\ -i\phi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{V} = 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_0, \quad \mathfrak{W} = 4\lambda^2\mathfrak{U} + 2\lambda\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_1,$$

из соотношений $(Y_x)_z = (Y_z)_x$ и $(Y_x)_t = (Y_t)_x$ получаем так называемые «уравнения нулевой кривизны»

$$\mathfrak{U}_z - \mathfrak{V}_x + \mathfrak{U}\mathfrak{W} - \mathfrak{V}\mathfrak{U} = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}_t - \mathfrak{W}_x + \mathfrak{U}\mathfrak{W} - \mathfrak{W}\mathfrak{U} = 0, \quad (1.2)$$

которые должны выполняться при всех значениях спектрального параметра λ . Из равенств (1.2) следует, что матрицы $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{W}_0, \mathfrak{W}_1$ имеют вид

$$\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{V}_0 = \begin{pmatrix} -i\psi\phi & -\psi_x \\ -\phi_x & i\psi\phi \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{W}_1 = \begin{pmatrix} \psi_x\phi - \psi\phi_x & 2i\psi^2\phi - i\psi_{xx} \\ -2i\psi\phi^2 + i\phi_{xx} & \psi\phi_x - \psi_x\phi \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

и что, соответственно, $\mathfrak{W} = 2\lambda\mathfrak{V} + \mathfrak{W}_1$. Кроме специального вида матриц (1.3) условия (1.2) приводят к дополнительным соотношениям, которыми являются расщепленное нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\begin{cases} i\psi_z + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi = 0, \\ i\phi_z - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

и расщепленное модифицированное уравнение Кортевега де Фриза

$$\begin{cases} \psi_t + \psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x = 0, \\ \phi_t + \phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

С этими двумя системами нелинейных дифференциальных уравнений непосредственно связаны еще две. Дифференцируя равенства (1.4) по x и подставляя их в (1.5), получаем расщепленное модифицированное двумерное нелинейное уравнение Шрёдингера в конусных координатах [43]

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xz} + 2i(\psi\phi_x - \phi\psi_x)\psi = 0, \\ i\phi_t - \phi_{xz} + 2i(\phi\psi_x - \psi\phi_x)\phi = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

а решениями расщепленного интегрируемого уравнения Хироты ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xx} - 2\psi^2\phi - i\alpha(\psi_{xxx} - 6\psi\phi\psi_x) = 0, \\ i\phi_t - \phi_{xx} + 2\psi\phi^2 - i\alpha(\phi_{xxx} - 6\psi\phi\phi_x) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

являются функции $\psi(x, t, -\alpha t)$ и $\phi(x, t, -\alpha t)$, где $\psi(x, z, t)$ и $\phi(x, z, t)$ суть решения систем (1.4) и (1.5).

Системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.4), (1.5) являются первыми двумя интегрируемыми системами из бесконечной иерархии таких систем, называемой АKNС-иерархией [26]. Одной из особенностей конечнозонных многофазных решений интегрируемых нелинейных уравнений является тот факт, что в некотором смысле они являются решением всей иерархии. Из уравнений (1.4) редукциями $\phi = \pm \bar{\psi}$ получают стандартные формы нелинейного уравнения Шрёдингера, одной из которых (при $\phi = -\bar{\psi}$) является уравнение (1) [34, 41, 44]. Также при $\phi = -\bar{\psi}$ из системы (1.7) получается интегрируемое уравнение Хироты [16, 45–47]

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - i\alpha(\psi_{xxx} + 6|\psi|^2\psi_x) = 0. \quad (1.8)$$

Конечнозонные (алгебро-геометрические) решения систем (1.4), (1.5) строятся по гиперэллиптической кривой $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$ рода g [26, 42]:

$$\Gamma: \chi^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j),$$

точки ветвления которой ($\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \dots, 2g+2$) являются краями зон спектра оператора Дирака (1.1a). Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две различные точки $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ кривой Γ . В случае $\phi = -\bar{\psi}$ кривая Γ должна быть инвариантна относительно антиголоморфной инволюции $\tau_1: (\chi, \lambda) \rightarrow (\bar{\chi}, \bar{\lambda})$, причем $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$:

$$\Gamma: \chi^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j) = \lambda^{2g+2} + \sum_{j=1}^{2g+2} \chi_j \lambda^{2g+2-j}, \quad \text{Im} \chi_j = 0. \quad (1.9)$$

Следуя стандартной процедуре построения конечнозонных решений [25, 34, 42], выберем на Γ канонический базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения условия $\phi = -\bar{\psi}$ необходимо [25, 34], чтобы при антиголоморфной инволюции τ_1 этот базис циклов преобразовывался по правилу

$$\hat{\tau}_1 \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad \hat{\tau}_1 \mathbf{b} = \mathbf{b} + K\mathbf{a}. \quad (1.10)$$

Каноническому базису циклов соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (1.11)$$

Хорошо известно (см., например, [34, 48]), что матрица периодов кривой Γ

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad k, j = 1, \dots, g, \quad (1.12)$$

есть симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью.

Построим по матрице периодов g -мерную тэта-функцию Римана с характеристиками $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^g$ [34, 48, 49]:

$$\Theta[\eta^t; \zeta^t](\mathbf{p}|B) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t B(\mathbf{m} + \eta) + 2\pi i(\mathbf{m} + \eta)^t(\mathbf{p} + \zeta)\},$$

$$\Theta[\mathbf{0}^t; \mathbf{0}^t](\mathbf{p}|B) \equiv \Theta(\mathbf{p}|B), \quad (1.13)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g$, суммирование проходит по целочисленной g -мерной решетке.

Определим также на Γ нормированные абелевы интегралы второго ($\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$, $\Omega_3(\mathcal{P})$) и третьего ($\omega_0(\mathcal{P})$), рода с асимптотикой в бесконечно удаленных точках \mathcal{P}_∞^\pm :

$$\oint_{a_k} d\Omega_1 = \oint_{a_k} d\Omega_2 = \oint_{a_k} d\Omega_3 = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(\mathcal{P}) &= \mp i(\lambda - K_1 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_2(\mathcal{P}) &= \mp i(2\lambda^2 - K_2 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_3(\mathcal{P}) &= \mp i(4\lambda^3 - K_3 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \omega_0(\mathcal{P}) &= \mp (\ln \lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), & \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \chi &= \pm(\lambda^{g+1} + O(\lambda^g)), & \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned}$$

Обозначим через $2\pi i\mathbf{U}$, $2\pi i\mathbf{V}$, $2\pi i\mathbf{W}$ векторы b -периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_1(\mathcal{P})$, $\Omega_2(\mathcal{P})$, $\Omega_3(\mathcal{P})$ соответственно.¹

Теорема 1 ([25, 42]). *Функция*

$$Y(\mathcal{P}, x, z, t) = \begin{pmatrix} y_1(\mathcal{P}, x, z, t) & y_1(\tau_0 \mathcal{P}, x, z, t) \\ y_2(\mathcal{P}, x, z, t) & y_2(\tau_0 \mathcal{P}, x, z, t) \end{pmatrix},$$

где τ_0 — гиперэллиптическая инволюция, $\tau_0: (\chi, \lambda) \rightarrow (-\chi, \lambda)$,

$$\begin{aligned} y_1(\mathcal{P}, x, z, t) &= \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \times \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + \Omega_3(\mathcal{P})t + i\Phi(x, z, t)\}, \\ y_2(\mathcal{P}, x, z, t) &= \rho \frac{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{\Delta} - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathbf{X})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \times \\ &\quad \times \exp\{\Omega_1(\mathcal{P})x + \Omega_2(\mathcal{P})z + \Omega_3(\mathcal{P})t - i\Phi(x, z, t) + \omega_0(\mathcal{P})\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

при любом $\rho \neq 0$ и при любых x и t будет являться собственной функцией оператора Дирака (1.1a) с потенциалом

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \frac{2K_0}{\rho} \frac{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \exp\{2i\Phi(x, z, t)\}, \\ \phi(x, z) &= 2\rho K_0 \frac{\Theta(\mathbf{Z} - \mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z})} \exp\{-2i\Phi(x, z, t)\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

¹Отметим, что в работах [25, 34] используется иная нормировка голоморфных дифференциалов (1.11) и соответственным образом модифицированные определения тэта-функции и векторов \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} .

удовлетворяющим (1.4), (1.5). Здесь Δ — вектор абелевых голоморфных интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки \mathcal{P}_∞^- и \mathcal{P}_∞^+ и не пересекающего ни один из базисных циклов,

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), & \Phi(x, z, t) &= K_1x + K_2z + K_3t, \\ \mathbf{X} &= \mathcal{K} + \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), & \mathbf{Z} &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathbf{X},\end{aligned}$$

\mathcal{K} — вектор римановых констант [34, 48–50], \mathcal{P}_j , $j = 1, \dots, g$ — неспециальный дивизор. При выполнении условия (1.9) выполняются равенство

$$|\psi|^2 = -4K_0^2 \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} - \Delta)\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}z + \mathbf{W}t + \mathbf{Z} + \Delta)}{\Theta^2(\mathbf{U}x + \mathbf{W}t + \mathbf{V}z + \mathbf{Z})} \quad (1.16)$$

и ограничения вещественности на параметры решения

$$\operatorname{Im} \mathbf{U} = \operatorname{Im} \mathbf{V} = \operatorname{Im} \mathbf{W} = \operatorname{Im} \mathbf{Z} = 0, \quad K_0^2 < 0.$$

Недавно один из авторов², анализируя работы [10, 11], заинтересовался указанной там связью между рациональными решениями фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения КП-I. В результате проведенных исследований оказалось [51, 52], что функция $u(x, z, t) = -2\psi\phi$, построенная по любым функциям $\psi(x, z, t)$ и $\phi(x, z, t)$, являющимися одновременно решениями уравнений (1.4) и (1.5), удовлетворяет уравнению Кадамцева–Петвиашвили-I (КП-I)

$$3u_{zz} = (4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x. \quad (1.17)$$

Нетрудно понять, что при $\phi = \pm\bar{\psi}$ это решение будет вещественным:

$$u(x, z, t) = \mp 2|\psi|^2.$$

Отметим, что по решениям дефокусирующего ($\phi = \bar{\psi}$) нелинейного уравнения Шрёдингера можно строить не только всюду отрицательные решения уравнения (1.17), поскольку для любого решения $u(x, z, t)$ уравнения (1.17) и для любой постоянной c_0 функция

$$v(x, z, t) = u(x - c_0t, z, t) + \frac{2}{3}c_0$$

также является решением уравнения (1.17).

Напомним также, что по любому решению уравнения КП-I можно по формуле [53–55]

$$w(x, z, t) = u\left(x + \frac{z^2t}{3}, zt, t\right)$$

построить решение цилиндрического уравнения КП-I (цКП-I)

$$\frac{3w_{zz}}{t^2} = \left(4w_t + w_{xxx} + 6ww_x + \frac{2w}{t}\right)_x. \quad (1.18)$$

Таким образом, строя многофазное конечнозонное решение уравнения (1), мы одновременно получаем решения уравнений (1.8), (1.17), (1.18) и редукций систем (1.5), (1.6):

$$\begin{aligned}\psi_t + \psi_{xxx} + 6|\psi|^2\psi_x &= 0, \\ i\psi_t + \psi_{xz} - 4|\psi|^2(\arg \psi)_x\psi &= 0.\end{aligned}$$

²А. О. Смирнов

2. Особенности трехфазных решений

В случае $g = 3$ базис голоморфных дифференциалов определяется по формуле [25, 34]

$$d\mathcal{U}_k = (c_{k1}\lambda^2 + c_{k2}\lambda + c_{k3})\frac{d\lambda}{\chi}, \quad (2.1)$$

где

$$C = (A^t)^{-1}, \quad A_{jm} = \oint_{a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi}.$$

Из равенства $\int_{\hat{\tau}\ell} d\omega = \int_{\ell} \tau^* d\omega$, где ℓ — произвольный путь на кривой Γ , следует, что

$$\begin{aligned} \overline{A_{jm}} &= \oint_{a_j} \overline{\lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi}} = \oint_{a_j} \tau_1^* \left(\lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} \right) = \\ &= \oint_{\hat{\tau}_1 a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} = - \oint_{a_j} \lambda^{3-m} \frac{d\lambda}{\chi} = -A_{jm}. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{A} = -A$, то $\overline{C} = -C$. Проводя аналогичные рассуждения с интегралами по b -циклам, получаем

$$\overline{B} = -B - K \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} B = -\frac{1}{2}K. \quad (2.2)$$

Из билинейных соотношений Римана (см., например, [25, 34, 48]) следует, что координаты векторов $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ имеют вид

$$\begin{aligned} U_m &= -i \left(\frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_-} \Big|_{\xi_-=0} - \frac{d\mathcal{U}_m}{d\xi_+} \Big|_{\xi_+=0} \right), \\ V_m &= -2i \left(\frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_-^2} \Big|_{\xi_-=0} - \frac{d^2\mathcal{U}_m}{d\xi_+^2} \Big|_{\xi_+=0} \right), \\ W_m &= -2i \left(\frac{d^3\mathcal{U}_m}{d\xi_-^3} \Big|_{\xi_-=0} - \frac{d^3\mathcal{U}_m}{d\xi_+^3} \Big|_{\xi_+=0} \right), \end{aligned}$$

где $\xi_{\pm} = 1/\lambda$ — локальные параметры в окрестности бесконечно удаленных точек $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$. Вычисляя производные, получаем равенства

$$\begin{aligned} U_m &= -2ic_{m1}, \quad V_m = 2i\chi_1 c_{m1} - 4ic_{m2}, \\ W_m &= i(4\chi_2 - 3\chi_1^2)c_{m1} + 4i\chi_1 c_{m2} - 8ic_{m3}, \end{aligned}$$

или

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) = iC \begin{pmatrix} -2 & 2\chi_1 & 4\chi_2 - 3\chi_1^2 \\ 0 & -4 & 4\chi_1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) вытекает, что векторы $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ действительны, линейно независимы и образуют базис в \mathbb{R}^3 . Следовательно, любой вектор из \mathbb{R}^3 может быть представлен в виде линейной

комбинации этих векторов. В частности, это относится к векторам периодов трехмерной тэта-функции $\mathbf{e}_1^t = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2^t = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3^t = (0, 0, 1)$:

$$\mathbf{e}_k = \mathcal{X}_k \mathbf{U} + \mathcal{Z}_k \mathbf{V} + \mathcal{T}_k \mathbf{W}.$$

Следовательно, амплитуда (1.16) трехфазного решения уравнения (1) будет периодической функцией в трехмерном пространстве

$$|\psi|(x + \mathcal{X}_k, z + \mathcal{Z}_k, t + \mathcal{T}_k) = |\psi|(x, z, t)$$

и, в случае решения в виде «волны-убийцы», максимумы ее амплитуды будут находиться в вершинах трехмерной решетки с образующими $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Z}_k, \mathcal{T}_k)$. Эти образующие могут быть найдены обращением матрицы $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2 & \mathcal{Z}_3 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})^{-1} = i \begin{pmatrix} 1/2 & \chi_1/4 & \chi_2/4 - \chi_1^2/16 \\ 0 & 1/4 & \chi_1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} A^t.$$

Поскольку трехфазное решение $\psi(x, z, t_0)$ уравнения (1) зависит от двух координат x и z и параметризуется третьей координатой $t = t_0$, то величина амплитуды этого решения зависит от того, насколько далеко от плоскости $t = t_0$ находятся вершины данной трехмерной решетки. Следовательно, в отличие от случая двухфазного решения [56, 57], где изменение начальной фазы \mathbf{Z} приводило к тривиальному сдвигу решения по плоскости XOZ , амплитуда трехфазного решения (1.15) уравнения (1) зависит от выбора начальной фазы $\mathbf{W}t_0 + \mathbf{Z}$ несколько более сложным образом (рис. 4). Если же рассматривать трехфазные решения уравнения КП-I, то их поведение можно описать следующим образом (рис. 2): через момент времени $\Delta t = \mathcal{T}_k$ поверхность решения $u(x, z)$ воспроизводит себя со сдвигом на плоскости XOZ на вектор $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Z}_k)$.

3. Гиперэллиптическая кривая рода $g = 3$ с двумя инволюциями

Для того чтобы воспользоваться матричным аналогом теоремы Аппеля [58] и выразить конечнозонное решение через эллиптические функции, потребуем от спектральной кривой Γ (1.9) инвариантности относительно дополнительных голоморфных инволюций

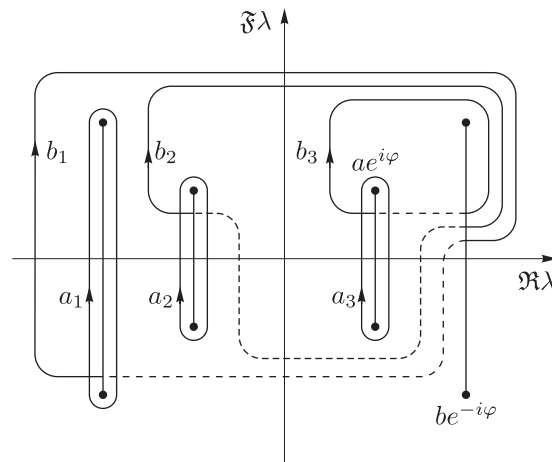
$$\tau_2: (\chi, \lambda) \rightarrow (\chi, -\lambda) \quad \text{и} \quad \tau_3: (\chi, \lambda) \rightarrow (c^4 \lambda^{-4} \chi, c^2 \lambda^{-1}).$$

Нетрудно проверить, что, в частности, данным условиям удовлетворяет кривая $(0 < a < b, c = \sqrt{ab}, \varphi < \pi/2)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_3: \chi^2 &= (\lambda^4 - 2a^2 \lambda^2 \cos 2\varphi + a^4)(\lambda^4 - 2b^2 \lambda^2 \cos 2\varphi + b^4), \\ \chi_1 &= 0, \quad \chi_2 = -2(a^2 + b^2) \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выберем на Γ_3 базисы циклов, как показано на рисунке 1.



Рис. 1. Кривая Γ_3 .

Нетрудно проверить, что антиголоморфная инволюция τ_1 преобразует базисы циклов по правилу (1.10) с матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и что голоморфные автоморфизмы τ_j ($j = 2, 3$) преобразуют базис циклов по правилу

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= M_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\tau}_j \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (M_j^t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + L_j \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, & L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку автоморфизмы τ_j ($j = 2, 3$) являются инволюциями, то соответствующие матрицы M и L удовлетворяют условиям

$$M^2 = I, \quad M^t L = -LM, \quad L^t = -L.$$

Из перестановочности инволюций τ_2 и τ_3 вытекает перестановочность матриц M_2 и M_3 , а также матриц J_2 и J_3 , где J_k — матрица преобразования ненормированных голоморфных дифференциалов

$$\tau_k^* \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{\chi} = J_k \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \frac{d\lambda}{\chi},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -c^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (3.2) следует, что матрицы C и B удовлетворяют условиям

$$CJ_k = M_k^t C, \quad B = M_k^t B M_k - M_k^t L_k, \quad (3.3)$$

а из соотношений (2.2), (3.3) вытекает, что матрица B имеет следующую структуру ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}$):

$$B = \begin{pmatrix} i(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3) & i\mathbf{b}_1 - 1/2 & i\mathbf{b}_3 - 1/2 \\ i\mathbf{b}_1 - 1/2 & i(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) & i\mathbf{b}_2 - 1/2 \\ i\mathbf{b}_3 - 1/2 & i\mathbf{b}_2 - 1/2 & i(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и структуры матрицы B (3.4) следует, что ее мнимая часть может быть диагонализирована с помощью матрицы T [58]:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть что является верным равенство $T^t B T = B' + A'$, где

$$B' = \begin{pmatrix} 4i\mathbf{b}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4i\mathbf{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4i\mathbf{b}_3 \end{pmatrix}, \quad A' = -\frac{1}{2} T^t K T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Также из (3.3) следует, что матрица C имеет вид ($\operatorname{Re} c_{jk} = 0$)

$$C = \begin{pmatrix} c_{31} + c_{21} & 0 & (c_{31} - c_{21})c^2 \\ c_{21} & c_{32} & -c_{21}c^2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{31}c^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Применяя матричную версию теоремы Аппеля [58], получаем, что трехмерная тэта-функция, используемая в решении (1.16), может быть выражена через эллиптические

функции:

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{p}|B) &= f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \\ &= \vartheta_3(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_3(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_3(\tilde{p}_3|h_3) + \vartheta_4(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_1(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_1(\tilde{p}_3|h_3) + \\ &\quad + \vartheta_1(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_4(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_1(\tilde{p}_3|h_3) + \vartheta_1(\tilde{p}_1|h_1)\vartheta_1(\tilde{p}_2|h_2)\vartheta_4(\tilde{p}_3|h_3),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где $\tilde{p}_j = p_j + p_{j+1} - p_{j+2}$, $p_{j+3} \equiv p_j$, $h_j = \exp(-4\pi\mathfrak{b}_j)$. Функции $\vartheta_j(p|h)$ — это эллиптические тэта-функции Якоби [59]:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(p|h) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} h^{(m-1/2)^2} \sin[(2m-1)\pi p], \\ \vartheta_2(p|h) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{(m-1/2)^2} \cos[(2m-1)\pi p], \\ \vartheta_3(p|h) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h^{m^2} \cos(2m\pi p), \\ \vartheta_4(p|h) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m h^{m^2} \cos(2m\pi p).\end{aligned}$$

4. Анализ решения

Из формулы для редукции тэта-функции (3.7) и значений векторов периодов (2.3) получаем следующую формулу для квадрата абсолютной величины трёхфазного решения (1.16) фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned}|\psi|^2 &= -4K_0^2 f(k_1x + \kappa_1t + \delta_1, k_2z + \delta_2, k_3x + \kappa_3t + \delta_3) \times \\ &\quad \times f(k_1x + \kappa_1t - \delta_1, k_2z - \delta_2, k_3x + \kappa_3t - \delta_3) \times \\ &\quad \times \{f(k_1x + \kappa_1t, k_2z, k_3x + \kappa_3t)\}^{-2},\end{aligned}\quad (4.1)$$

где функция $f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ задается равенством (3.7),

$$\begin{aligned}k_1 &= -4ic_{21}, \quad k_2 = -8ic_{32}, \quad k_3 = -4ic_{31}, \\ \kappa_1 &= -2k_1(\chi_2 + 2c^2), \quad \kappa_3 = -2k_3(\chi_2 - 2c^2).\end{aligned}$$

Вычисление параметров решения через эллиптические интегралы вынесено в приложение.

Из (4.1) следует, что функция $|\psi|^2$ периодична по z и почти-периодична по x и t . Кроме того, существуют значения

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right), \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{-ab}{a^2 + b^2}\right),$$

для которых будет выполняться равенство $\kappa_1 = 0$ или $\kappa_3 = 0$, и, соответственно, решение уравнения КП-I будет периодическим по t .

Для определенности будем считать, что $\varphi > \pi/4$. Характерный вид трёхфазного решения уравнения КП-I для этого случая изображен на рисунках 2 и 3.

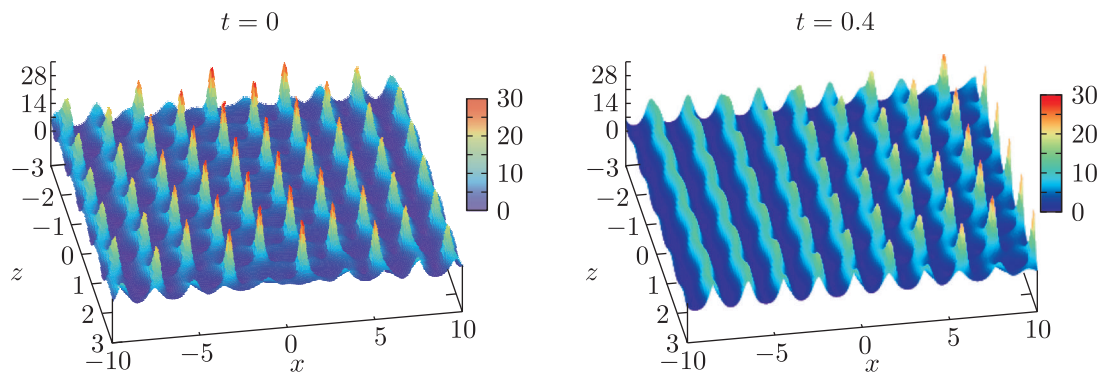


Рис. 2. Решение уравнения КП-I.

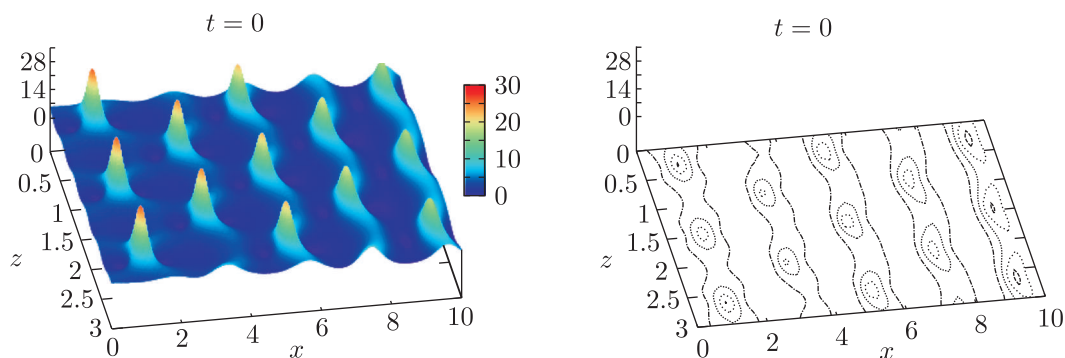


Рис. 3. Крупный план решения.

Решение, изображенное на рисунках 2 и 3, построено при $k_c = \sqrt{b/a} = 1.3$, $c = 1$, $\varphi = 0.4\pi$. Зависимость от t данного решения можно определить следующим образом: пики медленно движутся вправо, а длинноволновая огибающая — влево.

На крупном плане хорошо видно, что пики решения образуют две одинаковые прямоугольные решетки, вершины каждой из которых лежат в центрах прямоугольников периодов другой. Нетрудно видеть, что решение является периодическим по z и что почти-периодичность по x заключается в изменении величины амплитуды решения в зависимости от x -координаты узла решетки.

Изучение вопроса о зависимости параметров решения от параметров его спектральной кривой привело к следующим выводам ($Z = 1/|k_2|$, $X_j = 1/|k_j|$, $T_j = 1/|\kappa_j|$):

- период решения Z растет при уменьшении c , k_c и при увеличении φ ;
- периоды X_1, T_1 (первая фаза) и X_3, T_3 (третья фаза) растут при уменьшении c или k_c ;
- периоды X_1, T_1 растут при увеличении φ ;
- период X_3 слабо зависит от φ , немного возрастаая только вблизи значения $\varphi = \pi/2$;
- период T_3 имеет разрыв второго рода при $2\varphi = \arccos(-ab/(a^2 + b^2))$, вдали от разрыва почти не меняясь;
- параметры h_j , от которых зависит крутизна и амплитуда решения, не зависят от c при фиксированных k_c и φ ;
- параметры h_2, h_3 растут при $k_c \rightarrow 1$, в то время как h_1 убывает;

- параметры h_1, h_3 растут при $\varphi \rightarrow \pi/2$;
- зависимость параметра h_2 от φ заметна только вблизи $k_c = 1$, при этом h_2 растет с уменьшением φ .

Поскольку $|\psi| = \sqrt{u/2}$, то рисунки 2 и 3 одновременно показывают характерное поведение абсолютной величины трехфазного решения нелинейного уравнения Шрёдингера при некоторых значениях параметра t . График трехфазного решения нелинейного уравнения Шрёдингера при $z = 1.5$ и некоторых значениях параметра t показан на рисунке 4.

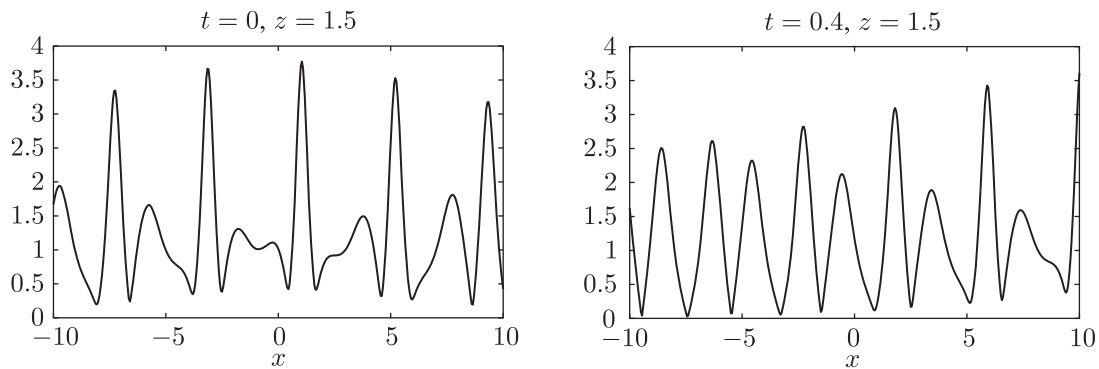


Рис. 4. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера при $z = -5$.

Заключительные замечания

Отметим, что периодичность решения по z является следствием симметрии кривой (следствием условия $\chi_1 = 0$ в равенстве (2.3)). Поэтому, просто сдвинув точки ветвления кривой вдоль действительной оси, из исходного периодического по z решения можно получить решение уже почти-периодическое по всем трем переменным. В этом случае решетки перестанут быть прямоугольными, но при этом вершины одной из решеток останутся в центре параллелограмма периодов другой.

Опыт работы с многофазными решениями [60, 61] указывает на то, что число решеток связано с числом листов накрывающего отображения: то есть рассмотрев какую-либо алгебраическую кривую рода g , n -листно ($n > 2$) накрывающую эллиптическую, можно построить g -фазное почти-периодическое решение уравнения КП-I, пики которого будут находиться в вершинах n четырехугольных решеток, сдвинутых друг относительно друга на n -ую часть периода. В то же время из опыта работы с двухфазными решениями уравнения (1) [56, 57] вытекает, что, взяв значения угла $\varphi < \pi/4$, мы получили бы решение с менее выраженными и более пологими пиками.

Авторы благодарят проф. В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

Приложение. Вычисление параметров трехфазных решений

Поскольку на Γ_3 заданы голоморфные инволюции τ_0, τ_2 , то она накрывает две другие кривые: $\Gamma_1 = \Gamma_3/\tau_2$ рода $g = 1$ (рис. 5),

$$\Gamma_1: \chi_+^2 = (t^2 - 2a^2t \cos 2\varphi + a^4)(t^2 - 2b^2t \cos 2\varphi + b^4), \quad (4.2)$$

и $\Gamma_2 = \Gamma_3/(\tau_2\tau_0)$ рода $g = 2$ (рис. 6),

$$\Gamma_2: \chi_-^2 = t(t^2 - 2a^2t \cos 2\varphi + a^4)(t^2 - 2b^2t \cos 2\varphi + b^4), \quad (4.3)$$

где

$$t = \lambda^2, \quad \chi_+ = \chi, \quad \chi_- = \chi\lambda$$

и

$$\frac{dt}{\chi_+} = 2\frac{\lambda d\lambda}{\chi}, \quad \frac{tdt}{\chi_-} = 2\frac{\lambda^2 d\lambda}{\chi}, \quad \frac{dt}{\chi_-} = 2\frac{d\lambda}{\chi}.$$

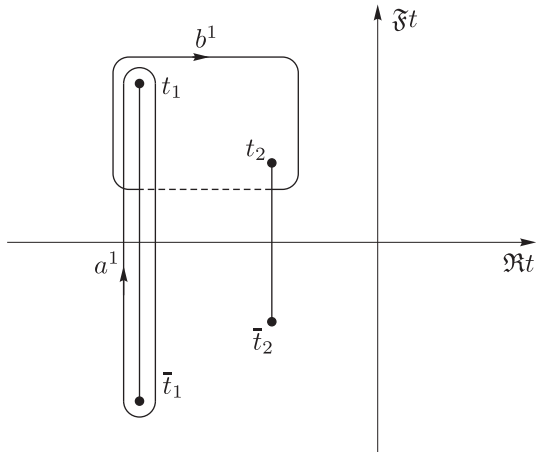


Рис. 5. Кривая Γ_1 .

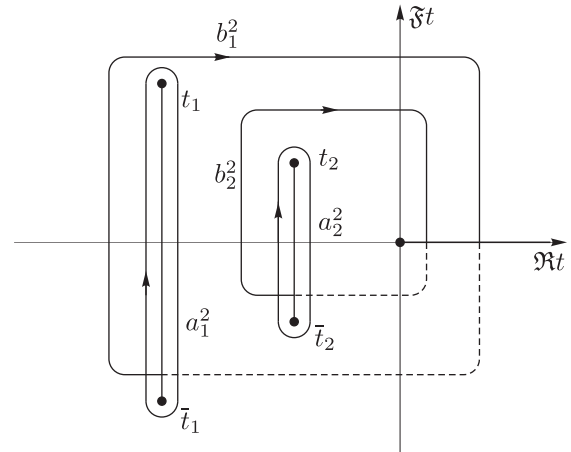


Рис. 6. Кривая Γ_2 .

Здесь $t_1 = b^2 e^{2i\varphi}$, $t_2 = a^2 e^{2i\varphi}$. Для определенности будем считать, что $\varphi > \pi/4$ и $2\varphi > \pi/2$. Накрывающие отображения порождают следующие отображения базисов циклов:

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3)^t \rightarrow \begin{pmatrix} S & P \\ Q & R \end{pmatrix} (a^1 \ a_1^2 \ a_2^2 \ b^1 \ b_1^2 \ b_2^2)^t,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что проверить правильность вычисления матриц S , P , Q , R можно с помощью соотношений [25, 62]

$$S^t Q = Q^t S, \quad R^t P = P^t R, \quad S^t R - Q^t P = nI,$$

где I — единичная матрица, $n = 2$ — число листов накрытий.

Наличие инволюции τ_3 приводит к тому, что Γ_2 в свою очередь накрывает две эллиптические кривые (рис. 7, 8; $s_1 = (a^2 + b^2) \cos 2\varphi + i(b^2 - a^2) \sin 2\varphi$)

$$\Gamma_{\pm}: \nu_{\pm}^2 = (s \pm 2c^2)(s^2 - 2(a^2 + b^2)s \cos 2\varphi + a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 \cos 4\varphi), \quad (4.4)$$

где

$$s = t + \frac{c^4}{t}, \quad \nu_{\pm} = \frac{t \pm c^2}{t^2} \chi_{\pm}, \quad \frac{ds}{\nu_{\pm}} = \frac{(t \mp c^2)dt}{\chi_{\pm}} = \frac{2(\lambda^2 \mp c^2)d\lambda}{\chi}.$$

Отображения Γ_2 на Γ_{\pm} порождают следующие отображения базисов циклов:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления с помощью формул связи между циклами и дифференциалами дают следующие значения для коэффициентов матриц C (3.6) и B (3.4):

$$c_{21} = \frac{1}{2(\alpha_1 - 2\beta_1)}, \quad c_{32} = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad c_{31} = \frac{1}{2(\alpha_3 - 2\beta_3)},$$

$$ib_1 = \frac{\alpha_1}{2(\alpha_1 - 2\beta_1)}, \quad ib_2 = \frac{\beta_2}{2\alpha_2}, \quad ib_3 = \frac{\alpha_3}{2(\alpha_3 - 2\beta_3)},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \oint_{a_+} \frac{ds}{\nu_+}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \oint_{a^1} \frac{dt}{\chi_+}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \oint_{a_-} \frac{ds}{\nu_-},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \oint_{b_+} \frac{ds}{\nu_+}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \oint_{b^1} \frac{dt}{\chi_+}, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} \oint_{b_-} \frac{ds}{\nu_-}.$$

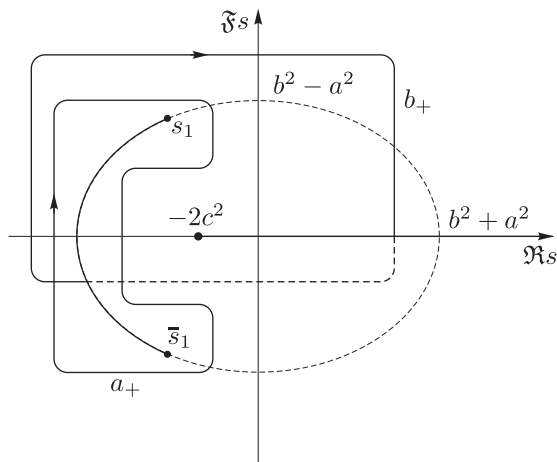


Рис. 7. Кривая Γ_+ .

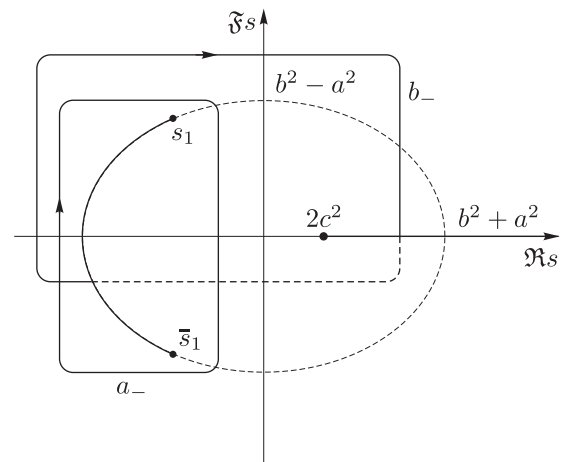


Рис. 8. Кривая Γ_- .

Сводя контурные интегралы к определенным, имеем

$$\alpha_1 = - \int_{-2c^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)(s + 2c^2)}},$$

$$\alpha_3 = - \int_{2c^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)(s - 2c^2)}},$$

$$\alpha_1 - 2\beta_1 = i \int_{-\infty}^{-2c^2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)(-2c^2-s)}},$$

$$\alpha_3 - 2\beta_3 = i \int_{-\infty}^{2c^2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s-\bar{s}_1)(2c^2-s)}}$$

и

$$\alpha_2 = \frac{-i\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{A_2C_2-B_2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(k^2-t^2)(1-t^2)}},$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{A_2C_2-B_2} \int_1^k \frac{dt}{\sqrt{(k^2-t^2)(t^2-1)}},$$

где $(\mathcal{R}_j = \text{Re}(t_j), \mathcal{I}_j = \text{Im}(t_j))$

$$k = \frac{(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + \mathcal{I}_1^2 + \mathcal{I}_2^2 + \sqrt{D}}{2\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2},$$

$$D = ((\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)^2)((\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)^2),$$

$$A_2 = \frac{\mathcal{I}_2(k^2 - 1)(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)}{(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)^2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2k)^2},$$

$$B_2 = \mathcal{I}_2 - A_2\mathcal{R}_2, \quad C_2 = -\mathcal{R}_2 - A_2\mathcal{I}_2.$$

Вычисление сдвигов фаз δ_j при $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ приводит к следующим выражениям:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} - i\mathbf{b}_1, \quad \delta_3 = \frac{1}{2} - i\mathbf{b}_3,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} + i\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2\alpha_2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t-t_1)(t-\bar{t}_1)(t-t_2)(t-\bar{t}_2)}} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2i\mathbf{b}_2 - \frac{\sqrt{(A_2^2+1)(A_2^2+k^2)}}{\alpha_2(A_2C_2-B_2)} \int_0^{-A_2} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+k^2)(t^2+1)}}.$$

Поскольку коэффициент K_0^2 выражается через интегралы по всем трем эллиптическим кривым и соответствующая формула очень громоздкая, то мы ее не приводим.

Список литературы

- [1] Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace // Phys. Lett. A, 2009, vol. 373, pp. 675–678.
- [2] Discussion & debate: Rogue waves — towards a unifying concept? // Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185, no. 1 / N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.). Berlin: Springer, 2010. 266 pp.
- [3] Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions // J. Aust. Math. Soc. Ser. B, 1983, vol. 25, pp. 16–43.



- [4] Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ, 2008, т. 88, № 5, с. 356–359.
- [5] Захаров В. Е., Шамин Р. В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, 2010, т. 91, № 2, с. 68–71.
- [6] Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue waves observation in a water wave tank // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, no. 20, 204502, 4 pp.
- [7] Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super rogue waves: Observation of a higher-order breather in water waves // Phys. Rev. X, 2012, vol. 2, no. 1, 011015, 6 pp.
- [8] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны: нелинейные импульсы и пучки. Москва: Физматлит, 2003. 304 с.
- [9] Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics // Nature Phys., 2010, vol. 6, no. 10, pp. 790–795.
- [10] Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V. B. On multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and positon solutions of the KdV equation // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2010, vol. 185, no. 1, pp. 247–258.
- [11] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011, vol. 11, pp. 667–672.
- [12] Ankiewicz A., Kedzora D. J., Akhmediev N. Rogue waves triplets // Phys. Lett. A, 2011, vol. 375, pp. 2782–2785.
- [13] Kedzora D. J., Ankiewicz A., Akhmediev N. Circular rogue wave clusters // Phys. Rev. E, 2011, vol. 84, no. 5, 056611, 7 pp.
- [14] Ohta Y., Yang J. General higher order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2012, vol. 468, pp. 1716–1740.
- [15] He J. S., Zhang H. R., Wang L. H., Porsezian K., Fokas A. S. Generating mechanism for higher-order rogue waves // Phys. Rev. E, 2013, vol. 87, no. 5, 052914, 10 pp.
- [16] Guo B., Ling L., Liu Q. P. Nonlinear Schrödinger equation: Generalized Darboux transformation and rogue wave solutions // Phys. Rev. E, 2012, vol. 85, no. 2, 026607, 9 pp.
- [17] Osborne A. R., Onorato M., Serio M. The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains // Phys. Lett. A, 2000, vol. 275, pp. 386–393.
- [18] Calini A., Schober C. M. Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation // Phys. Lett. A, 2002, vol. 298, pp. 335–349.
- [19] Schober C. M. Melnikov analysis and inverse spectral analysis of rogue waves in deep water // Eur. J. Mech. B Fluids, 2006, vol. 25, no. 5, pp. 602–620.
- [20] Dysthe K. B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 1979, vol. 369, pp. 105–114.
- [21] Trulsen K., Dysthe K. B. A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water // Wave Motion, 1996, vol. 24, no. 3, pp. 281–289.
- [22] Trulsen K., Kliakhandler I., Dysthe K. B., Velarde M. G. On weakly nonlinear modulation of waves on deep water // Phys. Fluids, 2000, vol. 12, no. 10, pp. 2433–2437.
- [23] Saini A., Vyas V. M., Pandey S. N., Raju T. S., Panigrahi P. K. Traveling wave solutions to nonlinear Schrödinger equation with self-steepening and self-frequency shift, arXiv:0911.2788 (2009), 8 pp.
- [24] Islas A. L., Schober C. M. Predicting rogue waves in random oceanic sea states // Phys. Fluids, 2005, vol. 17, no. 3, 031701, 4 pp.
- [25] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations. (Springer Ser. Nonlinear Dynamics.) Berlin: Springer, 1994. 350 pp.
- [26] Gesztesy F., Holden H. Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 1: $(1 + 1)$ -dimensional continuous models. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 79.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 505 pp.

- [27] Gesztesy F., Holden H., Michor J., Teschl G. Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 2: $(1 + 1)$ -dimensional discrete models. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 114.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. 438 pp.
- [28] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза: 1 // Функциональный анализ и его прил., 1974, т. 8, № 3, с. 54–66.
- [29] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations // Nonlinear wave motion: Proc. AMS–SIAM Summer Sem., Clarkson Coll. Tech., Potsdam, N. Y., 1972). (Lectures in Appl. Math., vol. 15.) Providence, R. I., 1974. P. 85–96.
- [30] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодическая задача для уравнений Кортевега – де Фриза и Штурма – Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией // Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 3, с. 531–534.
- [31] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и n -солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза // ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 51–68.
- [32] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55–136.
- [33] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183–208.
- [34] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–80.
- [35] Matveev V. B. 30 years of finite-gap integration theory // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2008, vol. 366, no. 1867, pp. 837–875.
- [36] McLaughlin D. W., Schober C. M. Chaotic and homoclinic behavior for numerical discretizations of the nonlinear Schrödinger equation // Phys. D, 1992, vol. 57, nos. 3–4, pp. 447–465.
- [37] Ablowitz M. J., Schober C. M., Herbst B. M. Numerical chaos, roundoff errors, and homoclinic manifolds // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 71, no. 17, pp. 2683–2686.
- [38] Calini A., Ercolani N. M., McLaughlin D. W., Schober C. M. Mel’nikov analysis of numerically induced chaos in the nonlinear Schrödinger equation // Phys. D, 1996, vol. 89, nos. 3–4, pp. 227–260.
- [39] Смирнов А. О. Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шрёдингера // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2012, т. 398, с. 209–222.
- [40] Ma Y. C. The perturbed plane-wave solitons of the cubic Schrödinger equation // Stud. Appl. Math., 1979, vol. 60, pp. 43–58.
- [41] Итс А. Р. «Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1985, т. 49, № 3, с. 530–565.
- [42] Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза // Матем. сб., 1994, т. 185, № 8, с. 103–114.
- [43] Kundu A., Mukherjee A., Naskar T. Modelling rogue waves through exact dynamical lump soliton controlled by ocean currents: Preprint, arXiv:1204.0916 (2012), 5 pp.
- [44] Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений // Вестн. ЛГУ, Сер. Матем., механ., астрон., 1976, т. 7, № 2, с. 39–46.
- [45] Dai C. Q., Zhang J. F. New solitons for the Hirota equation and generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients // J. Phys. A, 2006, vol. 39, no. 4, pp. 723–737.
- [46] Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation // Phys. Rev. E, 2010, vol. 81, no. 4, 046602, 8 pp.
- [47] Li C. Z., He J. S. Darboux transformation and positions of the inhomogeneous Hirota and the Maxwell – Bloch equation: Preprint, arXiv:1210.2501 (2012), 5 pp.
- [48] Бейкер Г. Ф. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций. Москва: МЦНМО, 2008. 736 с.
- [49] Fay J. D. Theta-functions on Riemann surfaces. (Lect. Notes in Math., vol. 352.) Berlin: Springer, 1973. 137 pp.

- [50] Krazer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903. 509 pp.
- [51] Смирнов А. О. Об одном семействе двухфазных решений уравнения Буссинеска: 1 // Научная сессия ГУАП: Сб. докл.: В 3 ч.: Ч. 1. Технические науки. СПб.: ГУАП, 2012. С. 219–223.
- [52] Смирнов А. О. О простейшем рациональном решении уравнения Буссинеска // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. научн. тр. СПб.: ГУРМФ, 2013. Т. 4, с. 58–64.
- [53] Липовский В. Д., Матвеев В. Б., Смирнов А. О. О связи между уравнениями Кадомцева – Петвиашвили и Джонсона // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, т. 150, с. 70–75.
- [54] Клейн К., Матвеев В. Б., Смирнов А. О. Цилиндрическое уравнение Кадомцева – Петвиашвили: старые и новые результаты // ТМФ, 2007, т. 152, № 2, с. 304–320.
- [55] Khusnutdinova K. R., Klein C., Matveev V. B., Smirnov A. O. On the integrable elliptic cylindrical Kadomtsev – Petviashvili equation // Chaos, 2013, vol. 23, 013126, 13 pp.
- [56] Смирнов А. О. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера в виде двухфазных странных волн // ТМФ, 2012, т. 173, № 1, с. 89–103.
- [57] Смирнов А. О. Периодические двухфазные «волны-убийцы» // Матем. заметки, 2013 (в печати).
- [58] Смирнов А. О. Матричный аналог теоремы Аппеля и редукции многомерных тэта-функций Римана // Матем. сб., 1987, т. 175, № 7, с. 382–391.
- [59] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. 2-е изд. Москва: Наука, 1970. 312 с.
- [60] Amosenok E. G., Smirnov A. O. Two-gap 2-elliptic solution of Boussinesq equation // Lett. Math. Phys., 2011, vol. 96, nos. 1–3, pp. 157–168.
- [61] Смирнов А. О., Головачев Г. М., Амосенок Е. Г. Двухзонные 3-эллиптические решения уравнений Буссинеска и Кортевега – де Фриза // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 239–256.
- [62] Смирнов А. О. Конечнотонные решения абелевой цепочки Тоды рода 4 и 5 в эллиптических функциях // ТМФ, 1989, т. 78, № 1, с. 11–21.

Constructed in the elliptic functions three-phase solutions for the nonlinear Schrödinger equation

Alexander O. Smirnov¹, Grigory M. Golovachev²

^{1,2}Saint Petersburg State University of Airspace Instrumentation (SUAI)

Bolshaya Morskaya str. 67, Saint Petersburg, 190000, Russia

¹alsmir@guap.ru, ²ggolovachev@yandex.ru

Three-phase finite-gap with behavior of almost-periodic freak waves solutions for the nonlinear Schrödinger and the KP-I equations were constructed. Dependencies of parameters of solutions from the parameters of spectral curve were studied.

MSC 2010: 35Q53

Keywords: rogue waves, freak waves, nonlinear Schrödinger equation, KP equation, Hirota equation, theta-function, reduction, covering

Received March 3, 2013, accepted May 31, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 389–407 (Russian)